Mathematical Journal of Okayama University

Volume 2, *Issue* 2 2008 *Article* 1

MARCH 1953

Sur un Ensemble De Capacité Nulle et L'infini D'un Potentiel

Nobuyuki Ninomiya*

*

SUR UN ENSEMBLE DE CAPACITÉ NULLE ET L'INFINI D'UN POTENTIEL

NOBUYUKI NINOMIYA

Le but de cette note est de donner une extension du théorème[1] fameux obtenu par M. G. C. Evans ; étant donné dans l'espace ordinaire un compact (fermé et borné) de capacité nulle, on peut toujours trouver une distribution de masse positive portée par celui dont le potentiel newtonien est infini en tous ces points. On va démontrer le théorème suivant.

Théorème.[2] *Si A est un ensemble G_δ (intersection dénombrable d'ouverts) contenu dans un ensemble F_σ (union dénombrable de fermés) de capacité nulle d'ordre α, on peut toujours trouver une distribution positive μ portée par A dont le potential d'ordre α*

$$U^\mu(M) = \int \frac{1}{\overline{MQ}^\alpha} d_\mu(Q), \quad 0 < \alpha < 3,$$

est infini en tout M de A et fini en tout M du complémentaire CA.

La démonstration repose sur l'idée du diamètre transfini pour des ensembles bornés quelconques. Soient $P_1, P_2, \cdots\cdots, P_n$ n points variables dans un ensemble borné E et posons

$$D_n(E) = \sup_{(P_1, P_2, \cdots\cdots, P_n)} \left[\frac{\sum_{i<j} \frac{1}{\overline{P_i P_j}^\alpha}}{\binom{n}{2}} \right]^{-\alpha}$$

Lorsqu'on fait ici $n \to +\infty$, $D_n(E)$ tend en décroissant vers une limite positive ou zéro. Cette démonstration sera facilement achevée en modifiant un peu la méthode au cas où E est un compact. On la désignera par $D^\alpha(E)$ et l'appelera le diamètre transfini d'ordre α de E. Il est difficile de rapporter la relation d'entre la capacité (intérieure ou extérieure) et le diamètre transfini définis pour un ensemble

1) G. C. Evans; Potentials and positively infinite singularities of harmonic functions, Monatschefte für Math. u. Phy., Bd. 43, 1936, pp. 419 - 424.

2) Si l'on n'astreindait pas μ à être portée par A, le théorème serait établi pour tout ensemble G_δ de capacité extérieure nulle. Voir "J. Deny; Sur les infinis d'un potentiel, C. R. Acad. Sci. de Paris, t. 224, 1947, pp. 524 - 525". L'auteur supposait $1 \leqq \alpha < 3$ pour utiliser les distributions capacitaires.

Mathematical Journal of Okayama University, Vol. 2 [2008], Iss. 2, Art. 1

borné quelconque. Cependant, si E est un compact, on aura en général $D^\alpha(E) \geqq C^\alpha(E)$ (capacité d'ordre α de E). Soulignons encore que si $C^\alpha(E)=0$, on a nécessairement $D^\alpha(E)=0$[1].

Lemme. *Si un ensemble borné E est du diamètre transfini nul d'ordre α, il existe une distribution positive μ portée par des points finis de E, de masse totale arbitrairement petite, dont le potentiel $U^\mu(M)$ d'ordre α est >1 en tout M de E.*

Pour cela, il suffit de montrer que, $P_1, P_2, \cdots\cdots, P_n$ désignant n points variables dans E,

$$a_n = \sup_{(P_1, P_2, \cdots\cdots, P_n)} \inf_{P \in E} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\overline{PP_j}^\alpha}$$

tend vers l'infini avec n. C'est facilement démontré en modifiant un peu la méthode utilisée par M. G. C. Evans[2].

Démonstration du théorème. Soit E un ensemble F_σ de capacité nulle d'ordre α contenant A. Alors, E est l'union d'une suite croissante des compacts E_n de capacité nulle d'ordre α, c'est-à-dire de capacité extérieure nulle d'ordre α. Donc E est de capacité extérieure nulle d'ordre α, et A l'est aussi naturellement. A est considéré comme l'intersection d'une suite décroissante des ouverts Γ_n dont la capacité d'ordre α est $< \frac{1}{2^{2n\alpha}} c_0$ en désignant par c_0 la capacité d'ordre α de la sphère-unité fermée. Soient $F_n = C\Gamma_n$ et F_n^p l'ensemble des points dont la distance d à F_n est $2^p \leqq \frac{1}{d^\alpha} \leqq 2^{p+1}$. Si l'on considére l'homothétie des capacités d'ordre α des compacts, on verra qu'il faut $p \geqq 2n$ pour $F_n^p \neq \theta$[3]. Posons $A_n^p = F_n^p \cap A \cap E_n$, alors, on a $A = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p \geqq 2n} A_n^p$. E_n étant un compact de capacité nulle d'ordre α, il est du diamètre transfini nul d'ordre α d'après le théorème de M. T. Ugaeri rapporté plus haut. Donc A_n^p l'est aussi. En vertu du lemme il existe une distribution ponctuelle μ_n^p portée par A_n^p, de masse totale $< \frac{1}{2^{2p}}$, dont le potentiel d'ordre α est >1 en tout point de A_n^p. Soient $\mu_n = \sum_{p \geqq 2n} \mu_n^p$ et $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n$. La distribution μ évidemment portée par A répondra à la question. D'abord, $U^\mu(M)$ est infini en tout M

1) T. Ugaeri; On the general potential and capacity, Jap. Jour. of Math., vol. 20, 1950, pp. 37 - 43. Voir Théorème 10.

2) G. C. Evns; loc. cit.

3) J. Deny; loc. cit.

de A, car $U^{\mu_n}(M)$ est >1 en tout M de $A \cap E_n$. Ensuite, soit M un point de CA, par exemple, de F_{n_0}. Pour tout $n \geqq n_0$, on a

$$U^{\mu_n}(M) = \sum_{p \geqq 2n} U^{\mu_n^p}(M) \leqq \sum_{p \geqq 2n} 2^{p+1} \frac{1}{2^{2p}} \leqq \frac{4}{2^{2n}}.$$

Encore, pour tout $n < n_0$, si M n'appartient pas à F_n, la distance de M à F_n^p est $>\delta$ (un nombre positif) pour tout p ($\geqq p_0 > 2n$) assez grand. Alors, on a

$$\sum_{p \geqq p_0} U^{\mu_n^p}(M) \leqq \frac{1}{\delta^\alpha} \sum_{p \geqq p_0} \frac{1}{2^{2p}} < +\infty.$$

Par conséquent, $U^{\mu_n}(M)$ est fini. Si M appartient à F_n, il l'est a priori comme plus haut. Donc, on a

$$U^{\mu}(M) \leqq \sum_{n=1}^{n_0-1} U^{\mu_n}(M) + \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{4}{2^n} < +\infty.$$

C. Q. F. D.

Department of Mathematics,
Okayama University

(*Received December 1, 1952*)